PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
Sekolah Teknik Elrektro dan Informatika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

Pengantar Matematika Diskrit

Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diksrit

RINALDI MUNIR

Lab Ilmu dan Rekayasa Komputasi
Kelompok Keahlian Informatika

Institut Teknologi Bandung

Kampus ITB yang indah...

Foto oleh Eko Purwono (AR ITB)

Inilah STEI-ITB…

LabTek V, di sini Informatika ITB berada

Salah satu mata kuliahnya....

IF2120 Matematika Diskrit

Sumber gambar: http://www.zazzle.com/i_can_be_functionally_discrete_or_continuous_tshirt-235341012435015470

Rasa ingin tahu adalah ibu dari semua ilmu pengetahuan

Tak kenal maka tak sayang, tak sayang maka tak cinta

Perjalanan satu mil dimulai dari satu langkah

Apakah Matematika Diskrit itu?

- Matematika Diskrit: cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit.

- Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)?

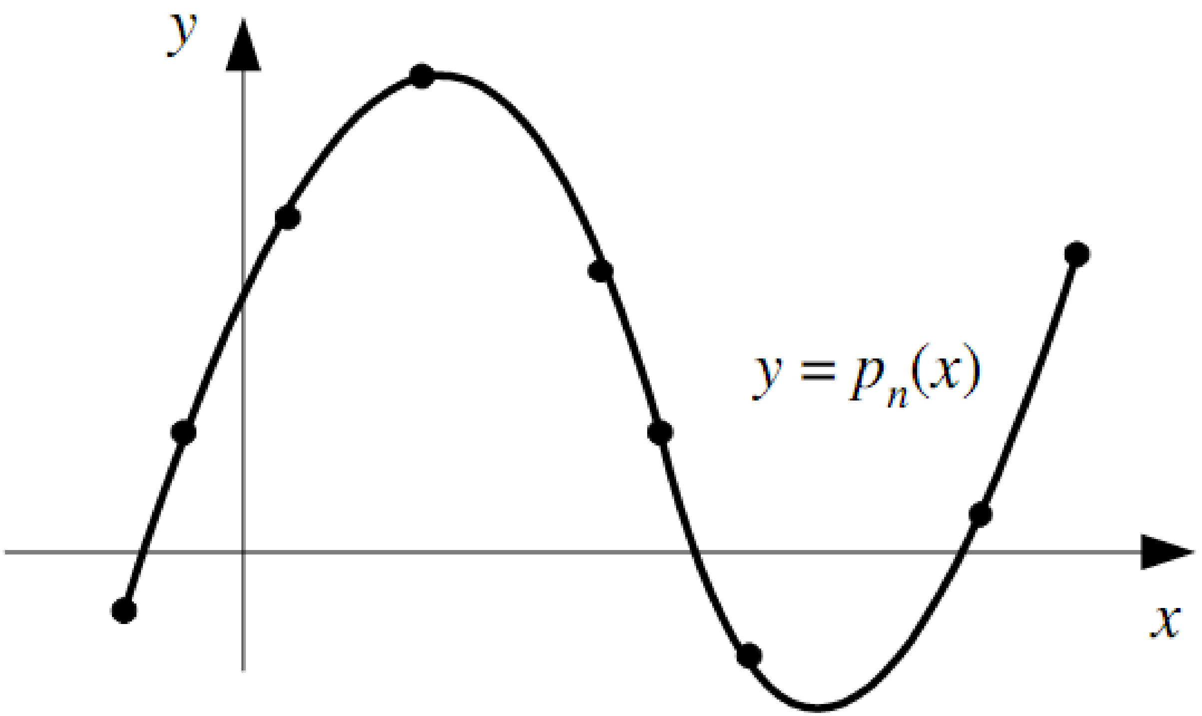
- Benda disebut diskrit jika:
  - terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda, atau
  - elemen-elemennya tidak bersambungan (*unconnected*).

  Contoh: himpunan bilangan bulat (*integer*)

- Lawan kata diskrit: **kontinyu** atau **menerus** (*continuous*).

  Contoh: himpunan bilangan riil (*real*)

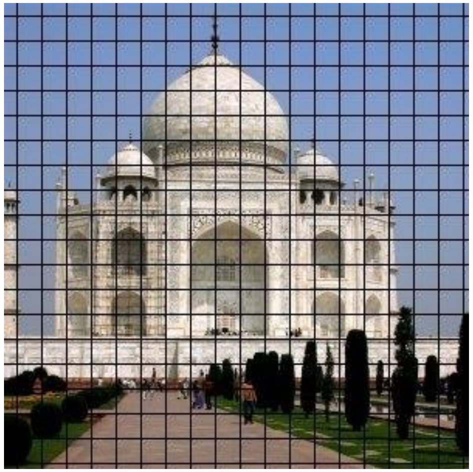
Diskrit versus kontinu



Kurva mulus: himpunan menerus
Titik-titik tebal di kurva: himpunan diskrit

- Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.

- Kamera digital menangkap gambar (analog) lalu direpresentasikan dalam bentuk diskrit berupa kumpulan *pixel* atau *grid.* Setiap *pixel* adalah elemen diskrit dari sebuah gambar



Topik bahasan di dalam Matematika Diskrit:

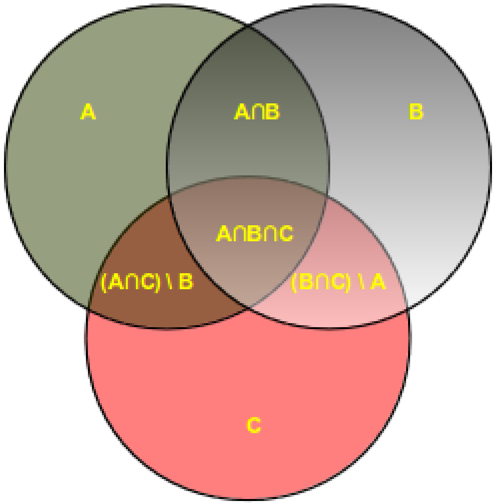
- Logika (*logic*) dan penalaran √ → Pengantar
- Teori Himpunan (*set*) √
- Relasi dan Fungsi (*relation and function*) √
- Induksi Matematik (*mathematical induction*) √
- Algoritma (*algorithms*) √ → sebagian
- Teori Bilangan Bulat (*integers*) √
- Barisan dan Deret (*sequences and series*) → kuliah Kalkulus
- Teori Grup dan *Ring* (*group and ring*) → advance
- Aljabar Boolean (*Boolean algebra*) → ke kuliah Arskom
- Kombinatorial (*combinatorics*) √
- Teori Peluang Diskrit (*discrete probability*) → ke kuliah Probstat
- Fungsi Pembangkit dan Analisis Rekurens →ke kuliah Modsim
- Teori Graf (*graph – included tree*) √
- Kompleksitas Algoritma (*algorithm complexity*) √
- Otomata & Teori Bahasa Formal → ke kuliah TBO
- Relasi Rekurens √ → Baru!

1. Logika

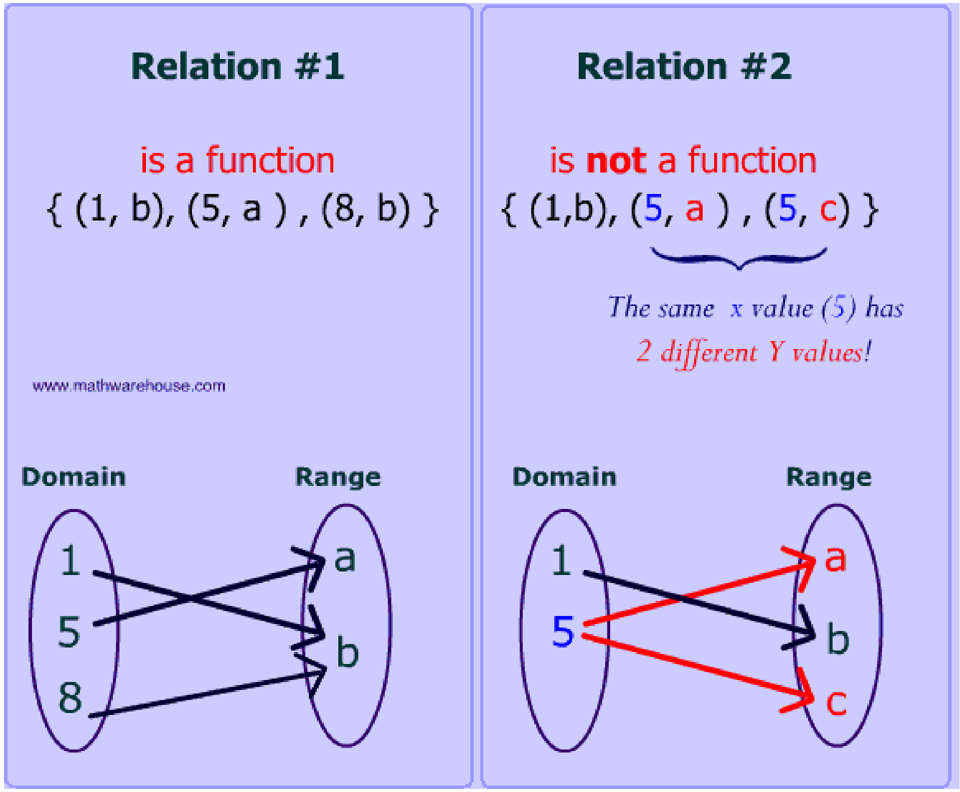
Basic statement	Equivalent
$p \vee q$	$q \vee p$
$p \wedge q$	$q \wedge p$
$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
	$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

2. Teori Himpunan

1). if $A \subset B$ and $B \subset C$, then $A \subset C$ (transitivity),
2). if $A \subset B$ and $B \subset A$, then $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (commutability of addition),
9). $A \cap B = B \cap A$ (commutability of multiplication),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativity of addition),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativity of multiplication),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivity of multiplication over addition),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (distributivity of multiplication over subtraction),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivity of addition over multiplication).

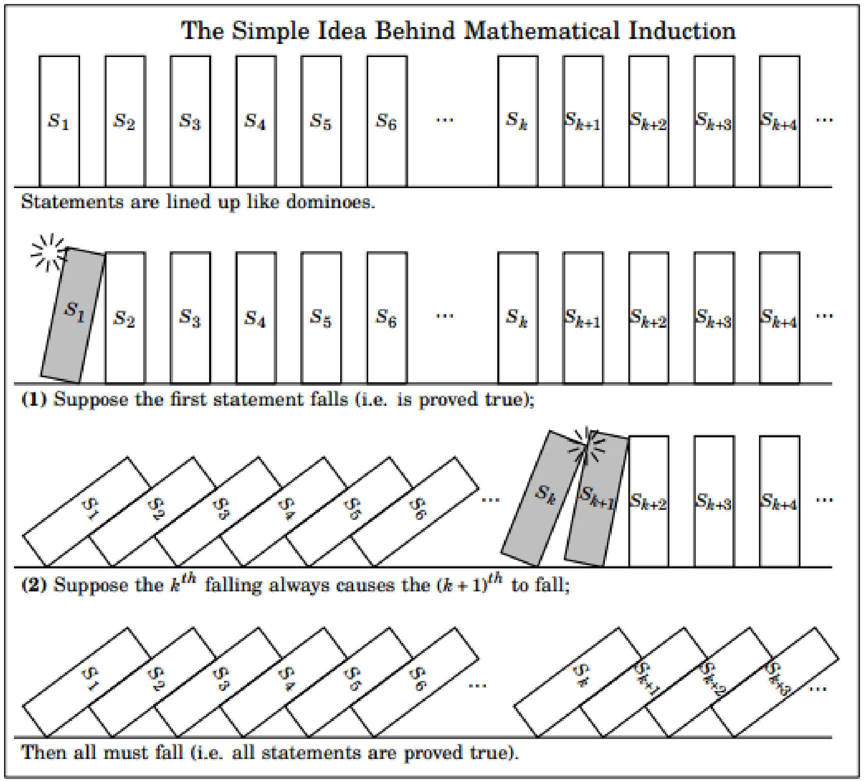


3. Relasi dan Fungsi



Sumber: www.mathwarehouse.com

4. Induksi Matematik



prove by mathematical induction

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$$

let P(n): $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$

for n=1, L.H.S = 1.2.3 = 6, R.H.S = $\dfrac{1.(1+1).(1+2).(1+3)}{4} = 6$

$\therefore P(1)$ *is true.*

Assume P(k) is true

[Sumber gambar: math.stackexchange.com]

5. Teori Bilangan

$$
\begin{cases} N \equiv 4 \pmod 7 \\ N \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}
$$

$$N = 7k + 4$$

$$7k + 4 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$7k \equiv 2 \pmod{11}$$

$$-21k \equiv -6 \pmod{11}$$

$$k \equiv -6 \pmod{11}$$

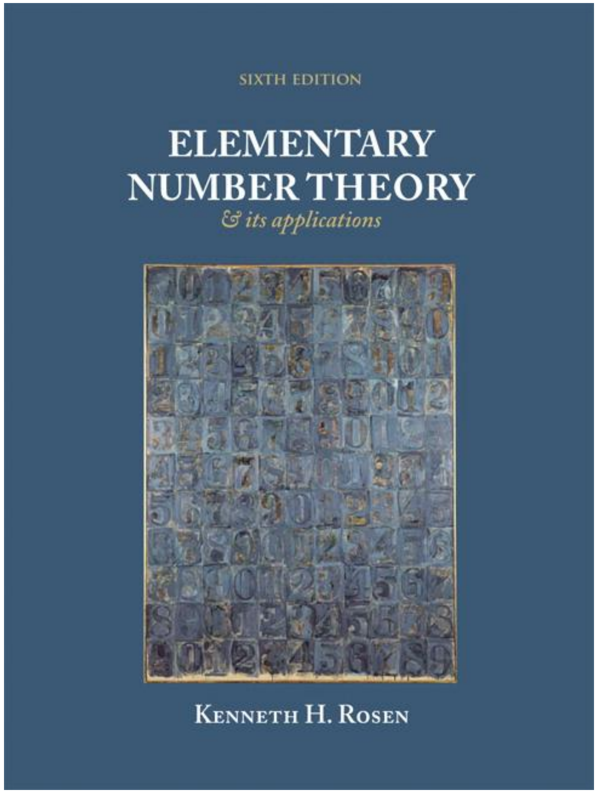
$$k = 11m - 6$$

$$N = 77m - 38$$

$$1000 < 77m - 38 < 2000 \Rightarrow 13 < m < 27$$

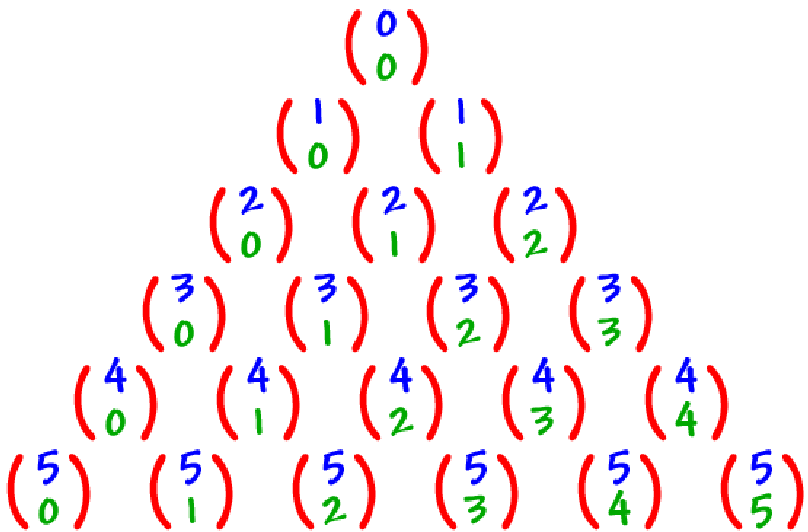
$$77m - 38 \equiv -m + 1 \equiv 27 - m \pmod{13}$$

Sumber: mymathforum.com



Sumber: www.pearsonhighered.com

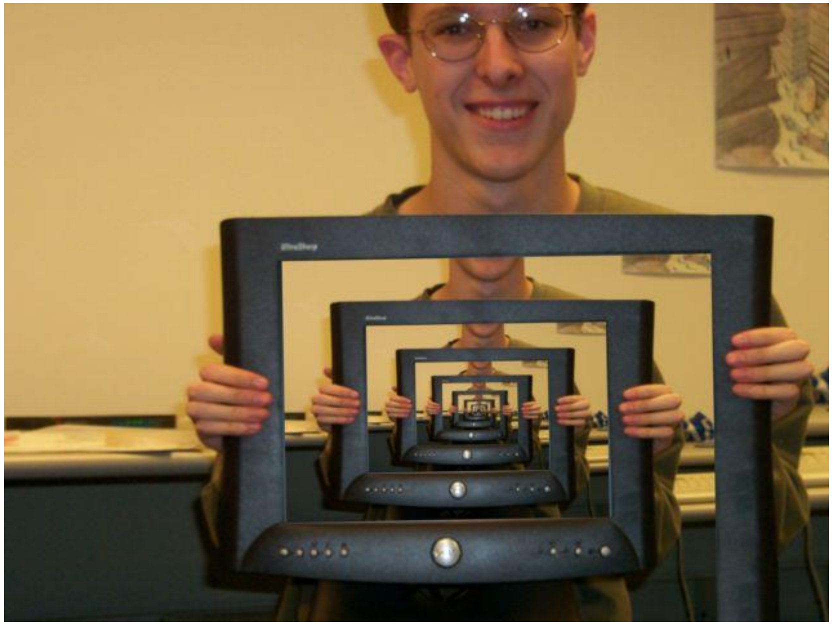
6. Kombinatorial



Sumber: www.coolmath.com

Sumber: ronsden.com

7. Rekursif dan relasi rekurens

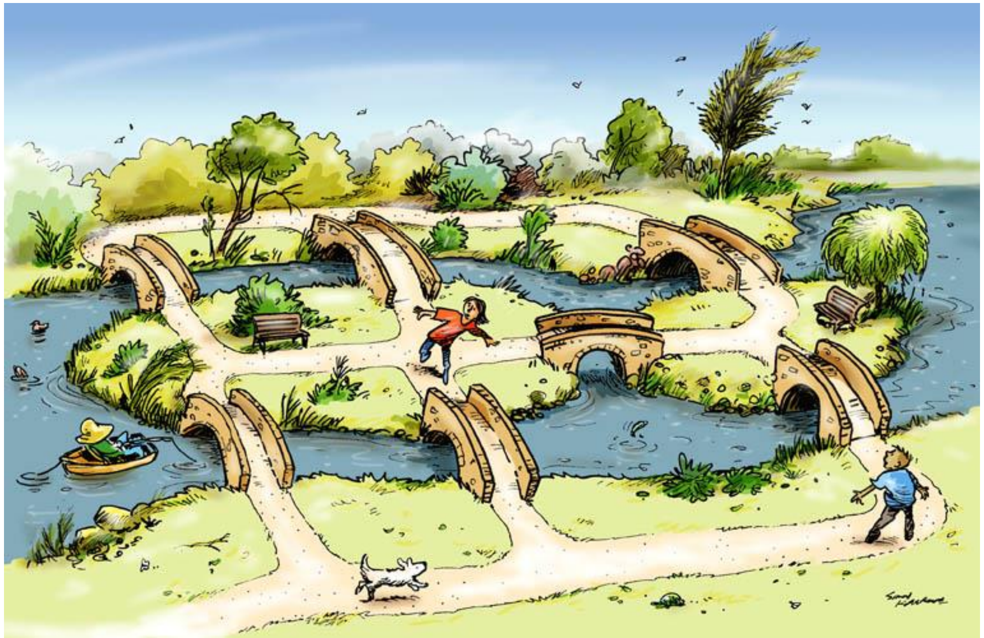


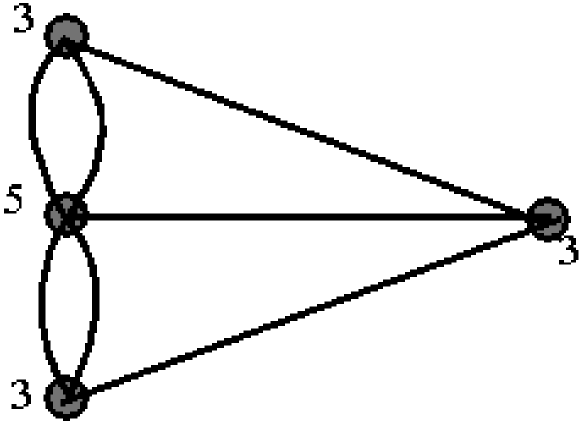
$$
\begin{aligned}
g(n) &= 4g(n-1)+4 \\
&= 4(4g(n-2)+4)+4 \\
&= 4^2 g(n-2)+4^2+4 \\
&= 4^2(4g(n-3)+4)+4^2+4 \\
&= 4^3 g(n-3)+4^3+4^2+4 \\
&= \vdots \\
&= 4^n g(0)+4^n+4^{n-1}+\cdots+4^3+4^2+4 \\
&= 4^n+4^{n-1}+\cdots+4^3+4^2+4 \\
&= 4\left(\frac{4^n-1}{3}\right) \\
&= \frac{4^{n+1}-4}{3}
\end{aligned}
$$

Sumber: www.ilxor.com

Sumber: cas.bethel.edu

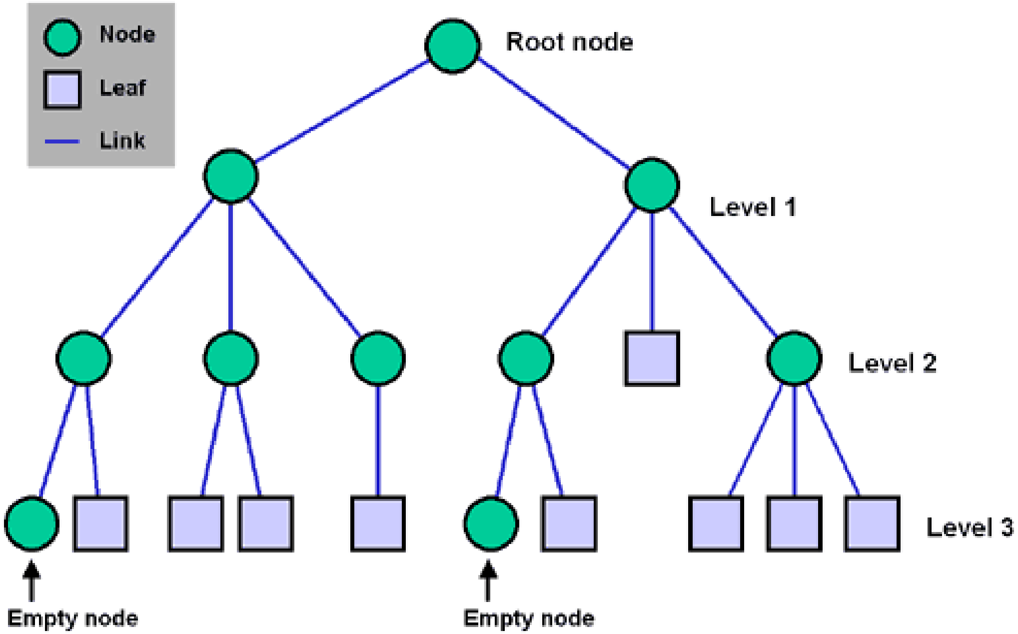
8. Teori Graf

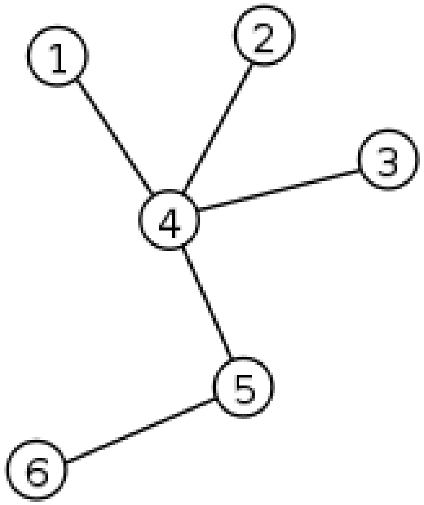




Sumber: simonkneebone.com

9. Pohon

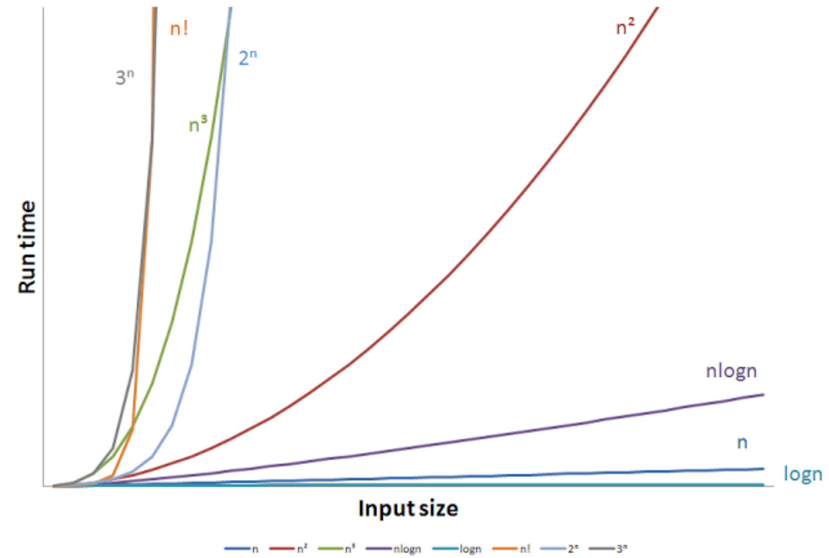




Sumber: ubuntuforums.org

10. Kompleksitas Algoritma

$T(n)$	Name	Problems
$O(1)$	constant	
$O(logn)$	logarithmic	
$O(n)$	linear	easy-solved
$O(nlogn)$	linear-logarithmic	
$O(n^2)$	quadratic	
$O(n^3)$	cubic	
$O(2^n)$	exponential	
$O(n!)$	factorial	hard-solved



Sumber: agafonovslava.com

Sumber: blog.philenotfound.com

Contoh-contoh persoalan di dalam Matematika Diskrit:

- Berapa banyak kemungkinan jumlah *password* yang dapat dibuat dari 8 karakter?
- Bagaimana nomor ISBN sebuah buku divalidasi?
- Berapa banyak *string* biner yang panjangnya 8 bit yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil?
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek dari satu kota *a* ke kota *b*?
- Buktikan bahwa perangko senilai n ($n \geq 8$) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja
- Diberikan dua buah algoritma untuk menyelesaian sebuah persoalan, algoritma mana yang terbaik?

- Bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital yang disusun oleh 7 buah batang (*bar*)?

- Dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perumahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

- “Makanan murah tidak enak”, “makanan enak tidak murah”. Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?

Mengapa Mempelajari Matematika Diskrit?

Ada beberapa alasan:

1. Mengajarkan mahasiswa untuk berpikir secara matematis

   → mengerti argumen matematika

   → mampu membuat argumen matematika.

Contoh: Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Akibatnya, untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selau genap.

2. Mempelajari fakta-fakta matematika dan cara menerapkannya.

Contoh: *(Chinese Remainder Problem)* Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

3. Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika.

→ algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb.

- Matematika diskrit adalah matematika yang khas informatika

  → **Matematika-nya orang Informatika**!

Lima pokok kuliah di dalam Matematika Diskrit

1. Penalaran matematika (*Mathematical reasoning*)
   Mampu membaca dan membentuk argumen matematika
   (Materi: logika)

2. Analisis kombinatorial (*Combinatorial analysis*)
   Mampu menghitung atau mengenumerasi objek-objek
   (materi: kombinatorial → permutasi, kombinasi, dll)

3. Sruktur diskrit

   Mampu bekerja dengan struktur diskrit. Yang termasuk struktur diskrit: Himpunan, Relasi, Permutasi dan kombinasi, Graf, Pohon, *Finite-state machine*

4. Berpikir algoritmik

   Mampu memecahkan persoalan dengan menspesifikasikan algoritmanya

   (Materi: pada sebagian besar kuliah ini dan kuliah Algoritma dan Struktur Data)

5. Aplikasi dan pemodelan

   Mampu mengaplikasikan matematika diskrit pada hampir setiap area bdiang studi, dan mampu memodelkan persoalan dalam rangka *problem-solving skill*.

   (Materi: pada sebagian besar kuliah ini)

Moral of this story…

- Mahasiswa informatika harus memiliki pemahaman yang kuat dalam Matematiak Diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

Buku Pegangan

1. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Application to Computer Science 5th Edition*, Mc Graw-Hill, 2003.
2. Rinaldi Munir, *Diktat kuliah IF2153 Matematika Diskrit (Edisi Keempat*), Teknik Informatika ITB, 2003. (juga diterbitkan dalam bentuk buku oleh Penerbit Informatika.
3. Richard Johsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, 1997.

URL

- Informasi perkuliahan (bahan kuliah, bahan ujian, soal kuis tahun2 sebelumnya, pengumuman, dll), bisa diakses di:

  http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/matdis.htm

atau masuk dari:

  http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/